درس اول: معرفی مجموعه

تعریف : هر دسته از اشیا را یک مجموعه و آن اشیا را اعضای مجموعه می نامند.

نکته : اعضای هر مجموعه را با و یا ویرگول جدا می کنند.

مثال : مجموعه ی $A = \{a , \{a\}, \{\{a\}\}\}$ چند عضو دارد؟

این مجموعه سه عضو دارد . $a , \{a\} \ , \ \{\{a\}\}$ سه اعضای این مجموعه هستند.

نکته : جمله ای که اعضای یک مجموعه را مشخص می کند باید کاملا واضح باشد.

مثال : کدام یک از دسته های زیر یک مجموعه را مشخص می کند؟

الف) اعداد طبیعی بزرگ تر از ۱۰۰۰ ب) اعداد خیلی بزرگ

پ) چهار عدد فرد متوالی ت) مقسوم علیه های عدد ۳۰

جواب : هر یک از گزینه های بالا اعضای مشخصی دارند به جز گزینه ی ب که اعضای آن کاملا مشخص نیستند.

نکته : تکرار اعضای مجموعه یک مجموعه را تغییر نمی دهد.

نکته : جابجایی اعضای مجموعه یک مجموعه را تغییر نمی دهد.

عضویت : اگر x عضو مجموعه ی A باشد می نویسیم x∈ A در این صورت باید x عینا در مجموعه ی A دیده شود . و اگر x عضو A نباشد می نویسیم x ∉ A

مثال : در مجموعه $A = \{۲ , \{۲\}, \{۳,۵\}\}$ کدام گزینه درست و کدام گزینه نادرست است؟

الف) $۲ \in A$ ب) $\{۲\} \in A$ پ) $\{\{۲\}\} \in A$ ت) $\{۲ , \{۲\}, \{۳,۵\}\} \in A$

گزینه ی الف و ب درست است گزینه ی پ درست نیست چون $\{\{۲\}\}$ عضو مجموعه نیست $\{۲\}$ عضو مجموعه A است . و گزینه ی ت خود مجموعه Aبه طور کامل است.

مجموعه ی تهی : مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی نام دارد. و با علامت Ø نمایش داده می شود.

مثال : آیا دو مجموعه ی $\emptyset$ و $\{\emptyset\}$ با هم برابرند؟ چرا؟

جواب : مجموعه ی $\{\emptyset\}$ یک مجموعه ی تک عضوی است که تنها عضو آن $\emptyset$ پس دو مجموعه بالا با هم مساوی نیستند.

زیرمجموعه : مجموعه ی B را زیر مجموعه ی مجموعه ی Aمی نامیم هرگاه هر عضو مجموعه ی B در مجموعه A باشد و با $B \subset A$ و اگر عضوی در مجموعه ی B باشد که در A نباشد می نویسیم $B \not\subset A$

مثال : در مورد مجموعه ی $A = \{a, \{b\}, \{c, d\}\}$ کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\{a\} \subset A$ ب) $\{a, b\} \subset A$ پ) $\{\{b\}\} \subset A$

گزینه ی الف درست است گزینه ی ب درست نیست چون b عضو A نیست و گزینه ی پ درست است.

نکته : همه ی زیر مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه ی مجموعه ای به نام مجموعه ی مرجع هستند. (M,U)

نکته : مجموعه ی تهی زیر مجموعه ی هر مجموعه ای است.

نکته : هر مجموعه ای زیر مجموعه ی خودش است.

زیر مجموعه ی محض : همه ی زیر مجموعه های یک مجموعه به غیر از خودش را زیر مجموعه های محض می گویند.

نکته : اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ باشد آن گاه $A=B$ است.

نکته : اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد آن گاه $A \subset C$ خواهد بود.

نکته : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : ۲^n

نکته : تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : $۲^n - ۱$

مثال : یک مجموعه ی ۱۰ عضوی چند زیر مجموعه دارد؟

حل : $$۲^n \to ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$$

مثال : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی برابر $۴^{۳n-۱}$ است . این مجموعه چند عضو دارد؟

حل : $۴^{۳n-۱} = ۲^{۶n-۲}$ پس تعداد اعضای این مجموعه برابر است با ۶n-۲

نکته : برای سهولت در محاسبات حاصل ضرب اعداد ۱ تا n را با نماد n! نمایش می دهند.

نکته : تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : $\frac{n!}{r!(n-r)!}$

نتیجه :تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ی n عضوی حاوی k عضو معین برابر است با : $\frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!}$

نتیجه :تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ی n عضوی فاقد k عضو معین برابر است با : $\frac{(n-k)!}{r!(n-k-r)!}$

نکته : تعداد زیر مجموعه های حاوی یا فاقد kعضو از یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : ۲^{n-k}

نکته : تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی و زوج عضوی یک مجموعه برابر است با : $۲^{n-۱}$

مثال: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی x+۵عضوی چند برابر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه x+۳ عضوی است؟

حل : $۲^{x+۵} \div ۲^{x+۳} = ۲^{۲} = ۴$

مثال : مجموعه ی $k = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند مجموعه ی حداقل ۳ عضوی دارد؟

حل : $\frac{۶!}{۳!(۶-۳)!} + \frac{۶!}{۴!(۶-۴)!} + \frac{۶!}{۵!(۶-۵)!} + \frac{۶!}{۶!(۶-۶)!} = ۴۲$

نکته : دو مجموعه ی Aو B با هم مساویند هرگاه هر عضو A در B و هر عضو Bدر A باشد.

به عبارت دیگر $(A \subseteq B, B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$

هنگامی دو مجموعه ی A و B نامساویند که حدال یک عضو در مجموعه ی A باشد که در B نیست و بالعکس

نکته : اگر $A \subseteq \emptyset$ باشد آن گاه $A = \emptyset$ و اگر $U \subseteq A$ باشد $A = U$

نکته : مجموعه ی همه ی زیر مجموعه های یک مجموعه را مجموعه ی توانی آن می گویند.

نحوه ی نمایش مجموعه ها :

۱-توصیفی :مجموعه را با توصیف اعضا مشخص می کنیم.

مانند : مجموعه ی اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰

۲- بیان ریاضی : در این روش با پیدا کردن یک ویژگی مشترک و نشان دادن آن ویژگی با علائم ریاضی مجموعه را بیان می کنیم.

مثال : اعداد طبیعی زوج $E = \{۲k | k \in N\}$

اعداد طبیعی فرد $O = \{۲k - ۱ | k \in N\}$

۳- نمودار ون : هر مجموعه را می توان داخل یک خط بسته نشان داد که به آن نمودار ون نیز می گویند.

مثال : اگر nعدد طبیعی باشد $۲<n\leq۳۰$ $A = \{x | x = ۳n + ۱ , x < ۷۰\}$ چند عضو دارد؟

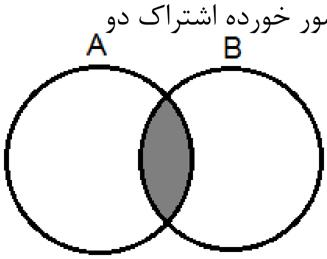
حل : $x < ۷۰ \Rightarrow ۳n + ۱ < ۷۰ \Rightarrow n < ۲۳ \Rightarrow ۲ < n < ۲۳ \Rightarrow \text{تعداد} = ۲۲ - ۳ + ۱ = ۲۰$

نکته : تعداد یک سری منظم از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\text{منظم یک سری منظم} = \left(\frac{\text{جمله آخر} - \text{جمله اول}}{\text{فاصله دو جمله}}\right) + \text{یک}$$

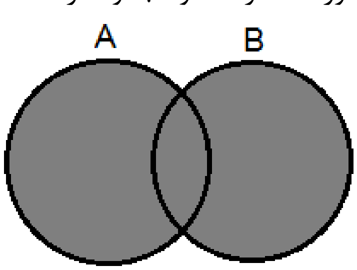
جبر مجموعه ها :

اشتراک دو مجموعه : اشتراک دو مجموعه ی A و B شامل همه ی عضوهایی هست که هم عضو مجموعه ی A و هم عضو مجموعه ی Bهستند . این مجموعه را با نماد A∩B نشان می دهند . در نمودار زیر سمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می دهد.



$$A \cap B = \{x | x \in A , x \in B\}$$

اجتماع دو مجموعه : اجتماع دو مجموعه ی A و B شامل همه ی عضوهایی هست که حداقل در یکی از دو مجموعه ی A و B هستند . این مجموعه را با نماد A∪B نشان می دهند . در نمودار زیر سمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می دهد.



$$A \cup B = \{x | x \in A \ \text{یا} \ x \in B\}$$

تعمیم اجتماع و اشتراک

N مجموعه ی دلخواه $A_۱, A_۲, \dots , A_n$ را در نظر بگیرید:

اجتماع این مجموعه ها برابر است با : $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n$

اشتراک این مجموعه ها برابر است با : $\bigcap_{i-۱}^{n} A_i = A_۱ \cap A_۲ \cap \dots \cap A_n$

مثال : اگر $A = \{m \in Z | m \geq n, ۲^m \leq n\}$ آن گاه مجموعه ی $A_۴ \cap A_۳$ چند زیر مجموعه دارد؟

دومجموعه ی جدا از هم : دو مجموعه را جدا از هم می گویند که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند. $A \cap B = \emptyset$

خواص اصلی اجتماع و اشتراک:

$$۱ - \begin{cases} A \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A \end{cases}$$

$$۲ - \left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A \cup C \subseteq D \cup B \\ A \cap C \subseteq B \cap D \end{cases}$$

$$۳ - \left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \subseteq B \cap C$$

$$۴ - \left.\begin{matrix} A \subseteq C \\ B \subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

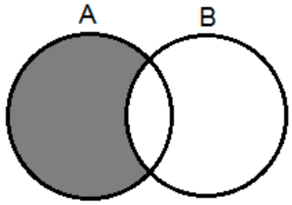
$$۵ - \quad A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$$

$$۶ - \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$ توزیع پذیری

$$۷ - \begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$ قوانین جذب

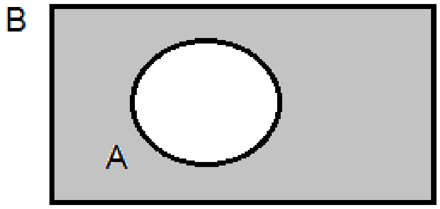
تفاضل دو مجموعه : مجموعه ی A-B مجموعه ای است شامل همه ی اعضایی که عضو A باشند ولی عضو B نباشند.

در شکل زیر مجموعه ی A-B و B-A هاشور خورده اند.



$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

متمم مجموعه : اگر A زیر مجموعه ی مجموعه ی B باشد متمم مجموعه ی A نسبت به B برابر است با B-A



$$\acute{A} = B - A = \{x \in B |\ x \notin A\}$$

روش شماره گذاری برای جبر مجموعه ها :

قضیه : هر گاه یکاجتماع چند مجموعه با اجتماع چند مجموعه ی دیگر برابر باشد و این مجموعه ها دو به دو جدا از هم باشند. آن گاه هر مجموعه که در یک طرف تساوی وجود داشته باشد ولی در طرف دیگر نباشد برابر با مجموعه ی تهی خواهد بود.

مثلا اگر $A \cup B = A \cup C$ آن گاه B=C=$\emptyset$

با استفاده از قضیه ی فوق هر گاه یک تساوی از مجموعه ها داشته باشیم می توانیم به روش زیر عمل کنیم.

۱- هر دو طرف تساوی را به صورت اجتماع مجموعه های جدا از هم می نویسیم.
۲- مجموعه های مساوی را از طرفین حذف می کنیم.
۳- مجموعه های باقیمانده را مساوی تهی قرار می دهیم و رابطه را محاسبه می کنیم.

در روش شماره گذاری ابتدا به هر مجموعه شکل دلخواهی نسبت می دهیم سپس به هر یک از مجموعه ها ی از هم جدا عددی را می دهیم و بوسیله ی این اعداد رابطه ی موجود را بازنویسی می کنیم و سپس مانند بالا عمل می کنیم.

مثال : اگر $A \cup B$=A-B باشد آن گاه کدام گزینه درست است؟

الف) B=$\emptyset$ ب) A=M پ) A=$\emptyset$ ت) B=M

$A \cup B = A - B \Rightarrow A \cup B = A \cup \acute{B} \Rightarrow B = \acute{B} = \emptyset$ پس گزینه ی اول درست است.

عدد اصلی یک مجموعه

تعداد اعضای یک مجموعه ی متناهی مانند A را عدد اصلی و با $n(A)$ نمایش می دهند.

مجموعه های متناهی و نامتناهی : اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد مجموعه را متناهی و اگر تعداد اعضایش محدود نبود نامتناهی می نامند.

ویژگی های مهم عدد اصلی:

الف) برای هر دو مجموعه ی متناهی :

$$\begin{cases} n(A-B)=n(A)-n(A\cap B) \\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \end{cases}$$

ب) برای هر سه مجموعه ی متناهی :

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap B)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

احتمال رخداد یک پیشامد :

احتمال رخداد پیش آمد از دستور مقابل به دست می آید.

$$\text{احتمال رخداد یک پیش آمد} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{همه تعداد حالت های ممکن}}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

انواع حالت های پیشامد

۱- A رخ دهد و B رخ ندهد. $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

۲- A و B رخ دهد ولی C رخ ندهد. $n\big((A\cap B)-C\big)=n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)$

۳- Aرخ دهد ولی B و Cهم زمان رخ ندهند: $n(A)-n(A\cap B\cap C)$

۴- A رخ دهد ولی B رخ ندهد و C رخ ندهد.

$$n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap B)+n(A\cap B\cap C)$$

۵-فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد. $n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$

مثال تعداد ارقام دو رقمی که بر ۷ بخش پذیرند لی بر ۱۱ بخش پذیر نیستند چقدر است؟

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=\left[\left(\frac{۹۹}{۷}-\frac{۹}{۷}\right)\right]-\left[\left(\frac{۹۹}{۷۷}-\frac{۹}{۷}\right)\right]=(۱۴-۱)-(۱-۰)=۱۲$$

در مثال بالا برای پیدا کردن تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ باید خارج قسمت صحیح تقسیم عدد ۹۹ بر ۷ را بیابیم.

اصل ضرب : هر گاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف و جزء دوم به n طریق مختلف انجام شود آنگاه آن عمل به $m\times n$ طریق مختلف انجام می شود.

مثال : چند عدد چهار رقمی می توان ساخت که از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ تشکیل شده باشد و بر ۵ بخش پذیر باشد.

حل تعداد هر رقم برای هر جایگاه

۵	۶	۶	۲

تعداد برابر است با : ۳۶۰ = ۲ × ۶ × ۶ × ۵

نکته : قرار گرفتن n شی متمایز در کنار هم از رابطه ی $n!$ به دست می آید.

مثال : با ارقام ۱ و ۹ و ۳ و ۷ و ۵ چند عدد ۵ رمی با ارقام مختلف می توان نوشت؟

حل تعداد ارقام برای هر جایگاه

۵	۴	۳	۲	۱

تعداد برابر است با : ۱۲۰ = ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵

مثال : یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم. همه ی حالت های ممکن را نمایش دهید. و احتمال پیشامد A که در آن فقط یک بار پشت بیاید را بیابید.

$$S=\left\{\begin{matrix}(\text{ر}-\text{ر}-\text{ر})(\text{ر}-\text{ر}-\text{پ})(\text{ر}-\text{پ}-\text{پ})(\text{ر}-\text{پ}-\text{ر})\\(\text{پ}-\text{ر}-\text{ر})(\text{پ}-\text{ر}-\text{پ})(\text{پ}-\text{پ}-\text{ر})(\text{پ}-\text{پ}-\text{پ})\end{matrix}\right\}$$

$$A=\{(\text{ر}-\text{ر}-\text{پ})(\text{ر}-\text{پ}-\text{ر})(\text{پ}-\text{ر}-\text{ر})\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$